

A large, stylized logo of the University of Bern, featuring a thick, curved line in shades of orange and pink that forms a shape reminiscent of a stylized 'A' or a mountain peak.

**ALGEBRA  
BERNAYS**  
SVEUČILIŠTE

**MATEMATIČKA  
ANALIZA**

**Parcijalna  
integracija**

# Metode integriranja

1. Metoda neposredne integracije
2. Metoda supstitucije
3. Metoda parcijalne integracija

# Metode integriranja

Primjer 1.

a)  $\int (x + e^x) dx$       neposredna integracija

b)  $\int x \cdot e^{x^2} dx$       supstitucija       $x^2 = t$

c)  $\int x \cdot e^x dx$       ???

# Metoda parcijalne integracije

Metodu parcijalne integracije koristimo kada je podintegralna funkcija umnožak dvaju faktora od kojih se jedan „lako” integrira, a drugi se deriviranjem pojednostavljuje.

Za rješavanje integrala koristimo formulu:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Formula za parcijalnu derivaciju slijedi iz pravila za derivaciju umnoška:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$d(uv) = v \, du + u \, dv \quad \Rightarrow \quad \int d(uv) = \int v \, du + \int u \, dv$$

$$uv = \int v \, du + \int u \, dv$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

# Metoda parcijalne integracije

Prilikom rješavanja integrala, jedan dio podintegralne funkcije nazovemo  $u$ , a drugi dio  $dv$ .

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right|$$

Funkciju  $u$  **deriviramo**, a  $dv$  **integriramo**!

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Metodu parcijalne integracije najčešće (ali ne isključivo!) koristimo za rješavanje integrala čija je podintegralna funkcija u obliku umnoška.

Dva su osnovna tipa takvih integrala:

I tip:

$$\int \textit{polinom} \cdot \begin{cases} a^x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases} dx$$

II tip:

$$\int x^\alpha \cdot \begin{cases} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcsin} x \end{cases} dx$$

# Metoda parcijalne integracije

Kod prvog tipa integrala koje rješavamo parcijalnom integracijom stavljamo

$$u = \text{polinom}$$

dok s  $dv$  pokrivamo ostatak integrala.

$$\int \underbrace{\text{polinom}}_u \cdot \underbrace{\begin{cases} a^x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases} dx}_{dv}$$

Cilj je dio integrala koji smo označili s  $u$  deriviranjem pojednostaviti. U isto vrijeme dio integrala koji smo označili s  $dv$  mora se relativno jednostavno integrirati.



# Metoda parcijalne integracije

Primjer 1. Riješite integral

$$\int (2x - 1) \cos x \, dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x - 1 & dv = \cos x \, dx \\ du = 2 \, dx & v = \sin x \end{array} \right|$$

$$= (2x - 1) \sin x - \int \sin x \cdot 2 \, dx$$

$$= (2x - 1) \sin x + 2 \cos x + c$$

Primjer 2. Riješite integral

$$\int x^2 \cdot 2^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = 2^x dx \\ du = 2x dx & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right|$$

$$= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int 2x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} dx = x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int x \cdot 2^x dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = 2^x dx \\ du = dx & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| = x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left( x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx \right)$$

## Primjer 2. Riješite integral

$$\begin{aligned} & \int x^2 \cdot 2^x dx \\ &= x^2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left( x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot x^2 2^x - \frac{2}{\ln^2 2} \cdot x 2^x + \frac{2}{\ln^2 2} \int 2^x dx \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot x^2 2^x - \frac{2}{\ln^2 2} \cdot x 2^x + \frac{2}{\ln^3 2} \cdot 2^x + c \end{aligned}$$

# Metoda parcijalne integracije

Drugi tip integrala koji rješavamo parcijalnom integracijom gdje je

$$dv = x^\alpha dx$$

dok s  $u$  pokrивamo ostatak integrala.

$$\int \underbrace{x^\alpha}_{dv} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \log_a x \\ \arctg x \\ \arcsin x \end{array} \right. dx$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_u \quad \underbrace{\hspace{0.5cm}}_{dv}$

Cilj je dio integrala koji smo označili s  $u$  deriviranjem pojednostaviti. U isto vrijeme dio integrala koji smo označili s  $dv$  predstavlja integraciju potencije koja je tablična.

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 3. Riješite integral

$$\int 4x^3 \ln x \, dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = 4x^3 dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x^4 \end{array} \right| = x^4 \ln x - \int \cancel{x^4} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

$$= x^4 \ln x - \int x^3 dx = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 4. Riješite integral

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \ln x dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^{-\frac{1}{2}} dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = 2\sqrt{x} \ln x - \int 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 5. Riješite integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \int x^{-1} \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^{-1} dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \ln x \end{array} \right|$$

$$= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

# Metoda parcijalne integracije





# Metoda parcijalne integracije

Primjer 5.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Uvedemo oznaku:  $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$

$$I = \ln^2 x - I$$

$$2I = \ln^2 x$$

$$I = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 5. Riješite integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

Integral inače  
rješavamo  
supstitucijom:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \left[ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt \\ &= \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c \end{aligned}$$

Primjer 6. Riješite integral

$$\int e^x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x \, dx & v = e^x \end{array} \right|$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x \, dx & v = e^x \end{array} \right|$$

$$= e^x \sin x - \left( e^x \cos x - \int -e^x \sin x \, dx \right)$$

Primjer 6.

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Uvedemo oznaku:  $I = \int e^x \sin x \, dx$

$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I \qquad 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 7. Riješite integral

$$\int \sin(\ln x) dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & dv = dx \\ du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right|$$

$$= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin(\ln x) \, dx &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx \\
 &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & dv = dx \\ du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right| \\
 &= x \sin(\ln x) - \left( x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx \right)
 \end{aligned}$$

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

$$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

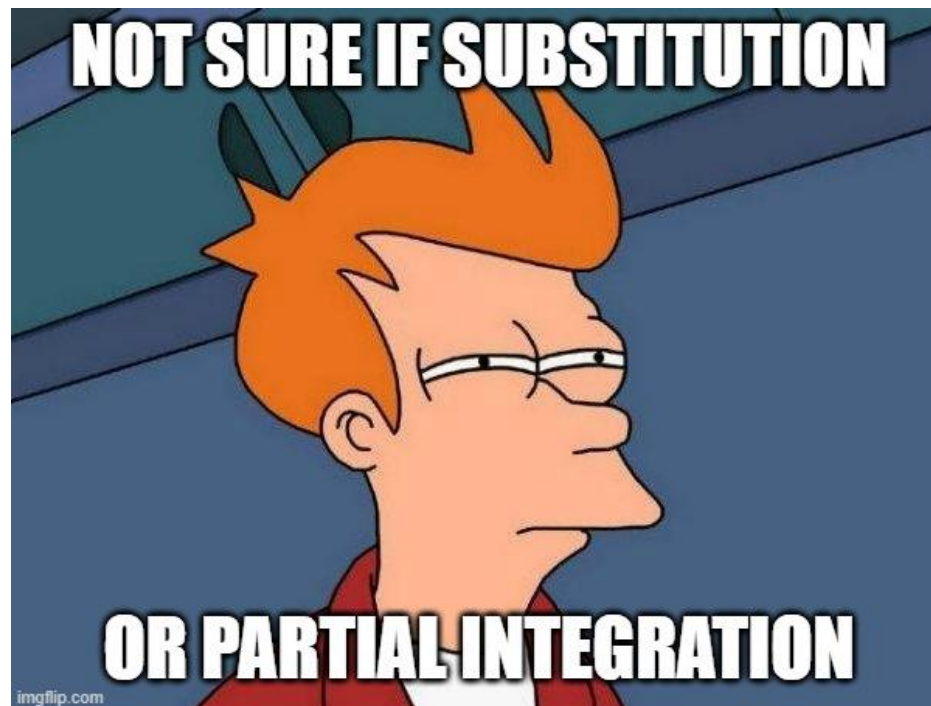
$$I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$$

# Metoda parcijalne integracije

Primjer 8. Riješite integral

$$\int (4x - 1)e^{2x} dx$$





# Metoda parcijalne integracije

Primjer 8. Riješite integral

$$\int (4x - 1)e^{2x} dx$$

linearna  
supstitucija

$$= \left| \begin{array}{l} u = 4x - 1 \\ du = 4dx \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dv = e^{2x} dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right|$$

$$= \frac{4x - 1}{2} e^{2x} - \int 2 \cdot e^{2x} dx = \frac{4x - 1}{2} e^{2x} - e^{2x} + c$$

# Video materijali

- <https://www.youtube.com/watch?v=e-s2Y87-A9A&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=7>
- <https://www.youtube.com/watch?v=aJBtG0YcNjc&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=8>
- [https://www.youtube.com/watch?v=TfebWK32G\\_M&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=9](https://www.youtube.com/watch?v=TfebWK32G_M&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=9)
- <https://www.youtube.com/watch?v=RkXs018ZqiM&list=PLcWN1hq0ODxk6WQ1qr4wHk9wSa0Wp6Ggo&index=10>

Hvala 😊